

Séries de Fourier [2]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P



Egalité de Bessel Parseval

Théorème 5 (Egalité de Bessel Parseval)

Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\sum a_n(f)^2 + b_n(f)^2$ converge, et

$$\frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

On remarque que si les coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont nulles alors la fonction est nulle.

Théorème de Dirichlet

Théorème 1 (Théorème de Dirichlet)

Soit f un élément de $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors:

- ❶ la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= c_0(f) + \sum_{n \geq 1} \left(c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} \right) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)\end{aligned}$$

- ❷ Si, de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire et telle que

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi/2 \\ \pi - t & \text{si } \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

- ❶ Vérifier que f appartient à $\text{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
- ❷ En déduire les sommes des séries:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2:

- 1 Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = |t|$$

- 2 En déduire la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Théorème de Féjer

Définition 3

- ① Pour tout $f \in \mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f)(x) = f(x).$$

- ② Si la restriction de f est continue sur I , alors la convergence est uniforme sur I .

Exercice 4: Montrer que si les coefficients de Fourier de deux fonctions de $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont identiques alors les fonctions sont égales.

Preuve du théorème de Féjer

Définition 5 (Noyaux de Dirichlet et Féjer)

On appelle noyau de Dirichlet la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

On appelle noyau de Féjer la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes trigonométriques définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Proposition 6

- ❶ Pour tout entier naturel n , les applications D_n et K_n sont paires.

❷

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) dx = 1$$

❸

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

❹

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad K_n(x) = \frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{n \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Proposition 7

Pour tout élément f de $\mathcal{D}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ et pour tout entier strictement positif n , nous avons

$$\frac{1}{2\pi} D_n * f = p_n(f) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} K_n * f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(f).$$

On peut vérifier que $\frac{1}{2\pi} K_n$ est une approximation de l'unité 2π périodique et on déduit le thm de Féjer.